7　合成系、相互作用、そして測定

7.1　合成

ある系は、他のもので構成されている。もしくはそのようにモデル化されている。固体や気体は分子で構成され、分子は原子で、原子は素粒子でという具合にである。すべての物理理論は複合系の表現ができなければならず、さらには、全体の状態が部分の状態とどのように関係づけられるかということについての、あるガイダンスを与えなければならない。このことに対する厳しい制限があるべきかどうかは、長い間自然哲学において謎だった。論理的、もしくは哲学的原子主義者は、次のことを主張する。部分の性質が完全に全体の性質を決定する。一方、全体主義者は、全体のある独立性を認めている。その問題は論理的に巧妙に処理される。: 部分の間の関係は、それ自体が全体の部分ではないのか？さもなくば、あるやり方で関係づけるなら、部分の性質そのものではないのか？しかし、物理理論は一般に系の状態の特殊な表記を持つから、表現されたような全体の状態が、そのように表現されている部分の状態により、決定されるかどうかの問題は残っている。量子力学の扱い方は、上記の用語を使うと、原子主義というよりはむしろ全体主義であることがわかるだろう。今日のアトムはかつてのアトモスではない。

二つの系 X と Y、そして複合系 X+Y を考えましょう。X と Y の純粋状態はヒルベルト空間 H_1、H_2 の中のベクトルで表現される。同様に、X+Y の純粋状態はより大きなベクトル空間 H_{12} の要素で表現される。このことは少なくとも次のような場合の余地を残している。X と Y が物理的には互いに関係ないが、思考上はつながっている。その場合、X+Y の状態は、X と Y が持つもの (x と y) によって記述される。この X+Y の状態を $x \otimes y$ と表現しよう。そうすると、我々が描くことのできる H_{12} の規約的な描像は次のようなものだ。

1. 次のような H_1、H_2 の H_{12} への写像 $\otimes$ がある。

(a) ベクトルの集合 $\{x \otimes y : x \in \mathrm{H}_1,\ y \in \mathrm{H}_2\}$ が空間 H_{12} を張る。

(b) $\otimes$ は bilinear：

$$x \otimes (y+z) = (x \otimes y) + (x \otimes z)$$
$$(x+y) \otimes z = (x \otimes z) + (y \otimes z)$$
$$b(x \otimes y) = (bx \otimes y) = (x \otimes by)$$

(c) $\otimes$ はスカラー積の積をとる。

$$(x \otimes y) \cdot (x' \otimes y') = (x \cdot x')(y \cdot y')$$

規約主義は (a) にある。なぜなら、H_{12} もまたヒルベルト空間でなければならないと認める一方で原子主義のポリシーを要求するようになっているからだ。(b) と (c) は次のことを言っている。内積を持つベクトル空間で定義された演算は pointwise に、古い文脈から新しい文脈へと繰り延べられる。このことは、再び規約的である。古いものから導出されない新しい構造の出現を禁止している。

H_1 と H_2 に対し H_{12} のようなものは本質的にひとつしかないという公理がある。これをテンソル積と呼ぶ。$x \otimes y$ を x と y のテンソル積と呼ぶ。多くのテキストは $\otimes$ について単に省略している。この節の終わりで詳細をのべましょう。上の 1 で示された性質で、直観的議論をするのには十分である。規約主義をとっても、$x \otimes y$ の形を取らない X+Y に対する状態を持つことは明らかだ。たとえば、重ねあわせ $(x \otimes y) + (x' \otimes y')$。条件 1 (b) は一見すると、この重ねあわせを

$(x+x')\otimes(y+y')$ に還元するように見える。しかし、そうはならない。後者を展開してみよう。

$$\begin{aligned}(x+x')\otimes(y+y') &= [(x+x')\otimes y]+[(x+x')\otimes y'] \\ &= (x\otimes y)+(x'\otimes y)+(x\otimes y')+(x'\otimes y')\end{aligned}$$

これは $(x\otimes y)+(x'\otimes y')$ より二つ項がおおい。複合系に絡み合った統計を与える混じりあった状態をもっている。規約主義に対する我々の主張は、数学的必然性をもって、部分の状態の単なる寄せ木細工的な組合せではない全体の新しい状態を生み出す。

同様にオブザーバブルを持つものにも起こる。我々は X+Y にたいし、以下のような質問をする。X と Y 各々の運動量はいくらであるか？さらに違った問いもするだろう。X+Y の全運動量はいくらか？X の運動量と Y の運動量の和はいくらか？だから、全体系に対するオブザーバブルの余地が残っている。そして重要な問題は、部分系に対するオブザーバブルとそれらがどのように関係しているかだ。この問題は二つの部分からなる。一つは、エルミート演算子に関するもの。もう一つは、測定結果の確率に関するもの。

A と B が、各々、H_1 と H_2 に対するエルミート演算子なら、テンソル積 $A\otimes B$ を次のように定義する。$A\otimes B(x\otimes y)=Ax\otimes By$。線形性によって、それを、$\mathrm{H}_{12}$ の中のすべてのベクトルに拡張する。A_1、A_2 がエルミート演算子なら、実数 a、b に対し aA_1+bA_2 もまたエルミート演算子である。それゆえ、我々は直感的なやり方で全体の状態に対し作用する演算子を持っている。H_1 で定義された M は、$M\otimes I_2(I_2$ は H_2 の恒等作用素) と同一視できる。そして同様に H_2 で定義された M' と $I_1\otimes M'$ も同一視できる。それらは、実際には部分系の一つにしか関係してないオブザーバブルを表している。測定結果の確率はを、いまは、前に述べたように形式的に計算できる。しかし、それらの確率が、合成系の部分間の相関をどのように含む事が出来るのかを、見てみなければならない。

議論を完成させるために、テンソル積の抽象的な定義と、その帰結を述べましょう。しかし、後になっても、それらはほんの少ししか役に立ちません。テンソル積空間中のベクトルにはギリシャ文字を使う。

H_1、H_2 がヒルベルト空間として、$\mathrm{H}_1\otimes\mathrm{H}_2$ を H_2 から H_1 への共役線形写像の集合とする。それは次のような写像 ϕ の集合を意味する。

(i) $\phi(x+y)=\phi x+\phi y$

(ii) $\phi(ax)=a\otimes\phi x$

そのような写像のひとつは $(x\otimes y)$ で、次のように定義される。H_2 の中の任意の z に対して

$$(x\otimes y)(z)=(z\bullet y)x \quad (x \text{ は } \mathrm{H}_1 \text{ の中で、} y \text{ は } \mathrm{H}_2 \text{ の中})$$

写像 $(x\otimes y)$ は、($\mathrm{H}_1\otimes\mathrm{H}_2$ のベクトルと呼ばれる) ベクトル空間と見做される集合を張る。このテンソル積空間のスカラー積は次のように定義される

$$(\psi\cdot\phi)=\sum_r(\psi(y_r)\cdot\phi(y_r))$$

ここで、$\{y_r\}$ は H_2 の基底である。この定義と 1(a)–(c) から次の性質がリストアップされる。

2. テンソル積の定理

(a) もし $\{x_i\}$ と $\{y_i\}$ が H_1 と H_2 の基底なら、$\{x_i\otimes y_i\}$ は H_{12} の基底である。

(b) $|x\otimes y|=|x||y|$

(c) $ax\otimes by=ab(x\otimes y)$

(d)

$$(x+y)\otimes z = x\otimes z + y\otimes z$$
$$x\otimes(y+z) = x\otimes y + x\otimes z$$

(e)

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}[a_i b_i(x_i\otimes y_i)] &= \sum_i [a_i(x_i\otimes\sum_j b_j y_j)]\\ &= \sum_j [(\sum_i a_i x_i)\otimes b_j y_j]\\ &= \sum_{i,j}(a_i x_i\otimes b_j y_j)\end{aligned}$$

(a) は 1(a) と (b) から演繹できる。(b)(c)(d) は 1(b) と (c) から演繹できる。(e) は 1(b) の可算和への一般化である。

上で書き出さなかった他の基本的性質を理解するためにテンソル積空間のオフィシャルな定義も使う。

3. 一意性の性質：もしベクトル x_i がお互いに直交し、$\sum x_i\otimes y_i = \sum x_i\otimes z_i$ なら、各々のインデックス i にたいし、$y_i = z_i$。テンソルの項の左右が逆でも真である。定義によって次のようになる。

$$[\sum(x_i\otimes y_i)](w) = \sum(w\cdot y_i)x_i$$
$$[\sum(x_i\otimes z_i)](w) = \sum(w\cdot z_i)x_i$$

w が H_2 の中にあるなら、H_1 の中の同じベクトルのふたつの記述だ。しかし、H_1 の中の直交分解は一意だ。それ故、次のように結論づけられる。H_2 の中の w に対して $(w\cdot y_i) = (w\cdot z_i)$。それから、$y_i = z_i$ と推論する。

証明と描写

David Finkelstein と Jeffrey Bub によって提出された測定確率と合成についての整合性の問題がある。古典確率論の大数の法則は次のことを述べている。もし、同じタイプの独立した試行をする。そのとき、そのタイプの可能な結果 a、b、c ... は確率 p_{a}、p_{b}、p_{c} をもつ。もしそうだとすると、結果 a の相対頻度の極限が p_{a} に等しい確率は、1 である。結果として、構成を単一の試行からそれの系列へと拡張する拡張すると、確率の 2 の現れは、ここでは同じ関数 p を指している。もしボルンの規則が量子力学に対する可能な確率の付与であるなら、テンソル積の構成は同様の結果をそれに結びつけなければならない。これは事実そうだ。A をオブザーバブルとし、その領域の状態 x に対し、N 重の状態を考慮しましょう。

$$x_N = x\otimes\cdots\otimes x$$

これを N 回取った積とする。この複合状態に対応するオブザーバブルは、

$$A_N = A\otimes\cdots\otimes A$$

で、これも N 回取る。しかし、次のような平均値に興味がある。

$$A(i) = I\otimes\cdots\otimes A\otimes\cdots\otimes I$$
$$< A >= \frac{1}{N}\sum A(i)$$

はじめの式の N 番目に A がでてくる。そして $i=1,....,N$。
次のような一意の数が存在すると主張する。

$$r=(x\cdot Ax)$$

状態 x にある時の A の期待値はつぎのようになる。

$$\lim_{N\to\infty}|<A>x_N-rx_N|=0$$

その証明は Bub の生徒の David Devine によって次のように定式化された。

$$\begin{aligned}&(x_N\cdot(<A>-r)^2x_N)\\&\quad=(x_N\cdot[\frac{1}{N^2}\sum A(i)^2+\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}A(i)A(j)-2\frac{r}{N}\sum A(i)+\mathrm{r}^2]x_N)\end{aligned}$$

$A(i)x_N$ が $x\otimes\cdots\otimes Ax\otimes\cdots\otimes x$ をあらわしているから、この表現を次のように簡単にできる。

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{N}(x\cdot A^2x)+\frac{N-1}{N}(x\cdot Ax)^2-2r(x\cdot Ax)+r^2\\&=[(x\cdot Ax)-r]^2+\frac{1}{N}[(x\cdot A^2x)-(x\cdot Ax)^2]\end{aligned}$$

N を無限大にすると、$[(x\cdot Ax)-r]^2=0$ になる。

7.2　還元

複合系 X+Y が $\mathrm{H}_1\otimes\mathrm{H}_2$ 上の状態 W にあるなら、要素 X と Y についてはどうであろうか？状態は、我々に測定結果の確率を与える。そうすると、次のことが要求されなければならない。

X の状態にある A の期待値は X+Y の状態にある $A\otimes I_2$ の期待値に等しい。

ここで I_2 は H_2 上の恒等作用素である。もし、B が Y に関係しているなら、要素 Y と $I_1\otimes B$ に対しても同様である。A が射影演算子の時、その期待値は確率そのものである。

同時に、グリーソンの定理から、次のことを演繹する。そのような状態を X に割り振ることが出来る。なぜなら、状態 W にある $I_s\otimes I_2$ の期待値は、H_1 の部分空間 S に関する完全に良い確率である。それゆえ、その定理は次のことを言う。次のようによぶ、そのような状態を表現する統計演算子が存在する。

$$\#W \text{ もしくは } \#W[X]、\#W[1]$$

この状態を W の還元と呼ぶ。もしくは、X+Y の X に関して (ヒルベルト空間 H_1 に関して) 還元された状態と呼ぶ。この文脈で使われた、密度マトリクスの還元と呼ばれる標準的手続きから、この専門用語が出てくる。この手続きに関する詳細は、証明と描写で与えた。しかし、それらをどのように導入するかということに基づいて、還元された状態についていくらか述べることが出来る。

1. W が $\mathrm{H}_1\otimes\mathrm{H}_2$ の上の統計演算子なら、$\#W[X]$ は H_1 上の次のような統計演算子である。H_1 上の全てのエルミート演算子 A に対し、

$$(A\#W[X])=\mathrm{Tr}((A\otimes I_2)W)$$

テンソル積空間 $\mathrm{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathrm{H}_N$ 上の状態 W をもつ一般的系 $\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_N$ と部分系 $\mathrm{X}_K+\cdots+\mathrm{X}_M$ に関するそれの還元 $\#W[\mathrm{K},\cdots,\mathrm{M}]$ に対し一般化することはたやすい。1 は全てのエルミート演

算子がオブザーバブルを表現している文脈で、もっともよく理解する。もしそうではないなら、還元された状態を表現する統計演算子は、そのように定義されるが、明らかに表記の役割はほかのものでも果たされる。一意性が失われる。

2. 混合の還元は、還元の対応する混合である。すなわち、もし $W = \sum p_i I_{\phi(i)}$ なら、$\#W = \sum p_i \# I_{\phi(i)}$。

$\#I\phi$ を $\#\phi$ と省略すると便利ではある。結果 2 は定義 1 に対する系である。なぜならトレースは線形であるからだ。

3. 還元は推移的だ。

$$\#(\#W[\mathrm{J}, \cdots, \mathrm{M}])[\mathrm{K}, \cdots, \mathrm{M}] = \#W[\mathrm{J}, \cdots, \mathrm{M}]$$

ここで J ≦ K ≦ M

小さな複合系でこのことを見るのはたやすい。X+Y+Z が、$\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2 \otimes \mathrm{H}_3$ の中の純粋状態 ϕ にあるとしよう。$\#\phi[\mathrm{Z}]$ にある時の A 期待値は、ϕ にある時の $I_1 \otimes I_2 \otimes A$ の期待値と、$\#\phi[\mathrm{Y}+\mathrm{Z}]$ にある時の $I_2 \otimes A$ の期待値と同じである。二つの期待値は一致しなければならない。なぜなら、$\#\phi[\mathrm{Y}+\mathrm{Z}]$ にある時の $I_2 \otimes A$ の期待値は ϕ にある時の $I_1 \otimes (I_2 \otimes A)$ の期待値と同じだからである。ポイントは、物理系の合成のようなテンソル積の構成は結合的である。

4. もし X+Y が完全に相関した状態 $\phi = \sum c_i x_i \otimes y_i$ にあるなら、(H_1 と H_2 に対する単位ベクトルの基底 $\{x_i\}$ と $\{y_i\}$ をもつ)

$$\#\phi[\mathrm{X}] = \sum c_i^* c_i I_{x(i)}$$
$$\#\phi[\mathrm{Y}] = \sum c_i^* c_i I_{y(i)}$$

特殊な還元としてこの系を指す。それは非常に重要な事例である。なぜなら、測定の議論や、量子力学の多くのパラドックスの議論は、そのような完全な相関の状態のなかにあるからだ。この場合、還元された状態がなんであるかがすぐにわかる。この系は次のように証明される。

Y についての B の期待値は次のものに等しい。

$$\begin{aligned}(\phi \cdot (I_1 \otimes B)\phi) &= (\phi \cdot (I_1 \otimes B)(\sum c_i x_i \otimes y_i)) \\ &= (\phi \cdot \sum c_i x_i \otimes B y_i) \\ &= \sum c_i (\phi \cdot x_i \otimes B y_i) \\ &= \sum c_i \sum c_k^* (x_k \otimes y_k \cdot x_i \otimes B y_i) \\ &= \sum c_i c_i^* (y_i \cdot B y_i)\end{aligned}$$

これは、要素 $c_i^* c_i$ で重みづけられた、純粋状態 y_i にある B の期待値の平均である。しかし、これは、混合状態 $\sum c_i^* c_i I_{y(i)}$ の期待値でもある。

この特殊な還元の結果は明らかだが重要な二つの系を持つ。

5. $\phi = x \otimes y$ なら $\#\phi[\mathrm{X}] = I_x$ で $\#\phi[\mathrm{Y}] = I_y$

6. 系全体が純粋状態であったとしても、一般に、還元された状態は純粋ではなく混合状態である。

この 6 は、合成の議論で見た全体主義と同じものに立ち戻ることになる。全体系の「もつれ合った統計」は、それの部分系に純粋状態を割り振ることを不可能にする。シュレディンガーは、この事を、量子力学の「真の (舟注：the の訳)」特異性と呼んだ。次のことを理解するのはたやすい。結果として、部分の (混合) 状態は全体の状態を一意には決定しない。

7. 純粋状態 $\sum c_i x_i \otimes y_i$ は、混合状態 $\sum c_i^2 I_{x(i) \otimes y(i)}$ と同じ還元を持つ。

これは簡単にチェックできる。一方に特殊還元の結果 4 を用い、他方に 2 と 5 を用いる。フォンノイマンは次の一般的な命題を証明した。

8. H_1 上の任意の状態 W_1 と H_2 上の W_2 に対し、H_1 上の還元された状態 W_1 と H_2 上のを W_2 各々もつ $\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2$ 上の状態 W が存在する。少なくとも W_1 か W_2 のうち一つが純粋である場合に限り、W は一意である。

これは証明しない。しかし、証明と描写で、フォンノイマンにしたがって他のものを証明する。

9. $\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2$ の中の全てのベクトルは、言明 4 で記述される完全に相関した形で書かれる。

フォンノイマンが注目したように、この事は次のことを意味する。$\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2$ 上の純粋状態は、それらの空間上で表現されるある量の間の一対一対応に影響している。